Concours Centrale - Supélec 1995

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Option TA

Un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormal $R = (O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Par souci de simplification, on note respectivement :

d'une part Ox, Oy, Oz les **axes de coordonnées** $(O;\vec{i})$, $(O;\vec{j})$, $(O;\vec{k})$,

d'autre part xOy, yOz, zOx les **plans de coordonnées** $(O;\vec{i},\vec{j})$, $(O;\vec{j},\vec{k})$, $(O;\vec{k},\vec{i})$.

Dans tout le problème, S désigne la surface d'équation cartésienne $z = \frac{x^2 - y^2}{2}$.

Partie I - Éléments de symétrie orthogonale de S

I.A - Indiquer, en justifiant les affirmations,

I.A.1) les plans de coordonnées qui sont plans de symétrie de S,

I.A.2) les axes de coordonnées qui sont axes de symétrie de S.

I.B - Montrer que les droites

$$\Delta \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \quad et \quad \Delta' \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

sont axes de symétrie de S.

Partie II - Intersections de S avec des plans parallèles aux plans de coordonnées

II.A - Montrer que l'intersection de S avec le plan d'équation $x = h (h \in \mathbb{R})$ est une parabole dont on précisera l'axe, le sommet et le paramètre et dont on tracera la projection orthogonale sur le plan yOz.

II.B - Quelle est l'intersection de S (nature, éléments) avec le plan d'équation $y = h (h \in \mathbb{R})$? On en tracera la projection orthogonale sur le plan zOx.

II.C - Quelle est l'intersection de S (nature, éléments) avec le plan d'équation $z = h (h \in \mathbb{R})$? On en tracera la projection orthogonale sur le plan xOy en distinguant les cas $h > 0$, $h = 0$, $h < 0$.

Partie III - Intersection Γ de S avec le cylindre C de révolution d'axe Oz et de rayon 1

III.A - Écrire une équation cartésienne de C.

III.B - Montrer que Γ admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = \frac{1}{2}\cos 2\theta \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

III.C - Tracer, en en précisant la nature, les projections orthogonales de Γ sur les trois plans de coordonnées.

III.D - On considère le domaine $\mathscr{D}$ de $\mathscr{E}$ défini par

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq \frac{x^2 - y^2}{2} \end{cases}$$

III.D.1) Dessiner $\mathscr{D}$.

III.D.2) Calculer le volume de $\mathscr{D}$.

Partie IV - Droites tracées sur S

IV.A - Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul de composantes (α,β,γ) et soit

$M_0\left(x_0,y_0,z_0=\frac{x_0^2-y_0^2}{2}\right)$ un point de S.

IV.A.1) Écrire une représentation paramétrique de la droite D passant par M_0 et dirigée par $\vec{v}$.

IV.A.2) À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $(\alpha,\beta,\gamma,x_0,y_0)$, a-t-on $D \subset S$?

IV.A.3) En déduire que par tout point M_0 de S passent deux droites distinctes (et deux seulement) D_0 et D'_0 tracées sur S. On explicitera les vecteurs directeurs $\vec{v_0}$ et $\vec{v'_0}$ de D_0 et D'_0 dont la première composante est égale à 1.

IV.B -

IV.B.1) Écrire une équation cartésienne du plan tangent P_0 à S en M_0.

IV.B.2) Déterminer le vecteur unitaire $\vec{n_0}$ orthogonal à P_0 dont la troisième composante est positive.

IV.C - On considère le repère $R_0 = (M_0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et on note (X,Y,Z) les coordonnées dans R_0 d'un point M de $\mathscr{E}$.

IV.C.1) Écrire dans R_0 des équations cartésiennes de S et de P_0.

IV.C.2) En déduire la position de S par rapport à P_0. Illustrer le résultat obtenu par un dessin.

Partie V - Sphères tangentes à S

V.A - Soit I le point de coordonnées $(0,0,1)$ dans $R = (O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

V.A.1) Écrire dans R une équation cartésienne de la sphère Σ de centre I et de rayon 1.

V.A.2) Montrer que Σ passe par O et qu'elle y admet le même plan tangent que S.

V.A.3) Montrer que $S \cap \Sigma$ se réduit au point O.

V.B - Soit $M_0 \in S$ et soit I_0 le point défini par $\overrightarrow{M_0I_0} = \vec{n_0}$ ($\vec{n_0}$ a été introduit en IV.B.2)).

V.B.1) Écrire dans $R_0 = (M_0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une équation cartésienne de la sphère Σ_0 de centre I_0 et de rayon 1.

V.B.2) Montrer que $S \cap \Sigma_0$ se réduit au point M_0 et que S et Σ_0 admettent même plan tangent en ce point.

V.C - Quand M_0 varie sur S, I_0 décrit une surface S'.

V.C.1) Donner dans R une représentation paramétrique de S'.

V.C.2) Comparer les plans tangents à S en M_0 et à S' en I_0.

••• FIN •••